物理数学テストゼミ

次元解析とテイラー展開

1.　物理量にはすべて次元 (単位) がある。長さの次元を [L]、時間の次元を $[T]$、質量の次元を $[M]$ と表すことにすると、速さは $[L/T]$、運動量は $[ML/T]$ などの次元を持っている。次元について以下の問いに答えよ。

(1)　バネ定数 k のバネにつながれた、質量 m の質点がある。この質点の振動周期 T は k 及び m だけで決まるであろう。そこで、

$$T \sim k^\alpha m^\beta$$

とおいて、次元が合うように α、β の値を決めよ。

(2)　一様重力下 (重力加速度 g) において、質量 m、長さ l の単振り子があるとする。この振動周波数 ω の m、g、l 依存性を知りたい。前問と同様に、

$$\omega \sim l^\alpha m^\beta g^\gamma$$

とおいて、次元が合うように α、β、γ の値を決め、結果について考察せよ。

2.　一様重力下 (重力加速度 g) における質量 m のボールの運動を考える。簡単のため、空気抵抗などは無視する。

(1)　ボールの運動方程式を立てよ。

(2)　基準の位置からの高さを y として、全エネルギーを書け。このとき、運動エネルギーと位置エネルギーの次元が等しいことを確かめよ。

(3)　運動方程式から全エネルギーが保存することを確かめよ。

(4)　初速 V_0 とし、仰角 θ で地面からボールを投げるとする。最も遠くに飛ぶ角度を求めよ。

3.　ある関数 $f(x)$ を、特定の点 x_0 の近傍で

$$f(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \cdots$$

と展開することを考える (テイラー展開)。両辺を適当に微分し、$x = x_0$ を代入することで係数 c_n を求めよ。

4.　次の関数を $x = 0$ の周りでテイラー展開せよ。

(1)　$\sin x$

(2)　$\cos x$

(3)　$\ln(1 + x)$

5.　$\sin x$ を $x = 0$ の周りで、x について 1 次まで展開した場合と 3 次まで展開した場合で、どの程度近似の程度が異なるか、$0 \leq x \leq \pi$ の範囲でグラフに描いて考察せよ。特に $x = \pi/2$ を代入した場合の値の違いを見よ。

物理数学テストゼミ

微分方程式の解法

6.　微分方程式のうち、一種類の変数のみによる微分しか含まないものを常微分方程式と呼ぶ。以下の常微分方程式の一般解を求めよ。

(1)

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\ln x}{y}$$

(2)

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y = 2\sin x$$

(3)

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + 3\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 2y = 0$$

7.　微分方程式に含まれる定数は、初期条件などを与えることで定まる。これを初期値問題 (境界値問題) と呼ぶ。次の初期値問題の解を求めよ。また $x > 0$ における解の振る舞いを描け。

(1)

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + 4\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 3y = 0 \qquad y(0) = 0,\ \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} = 1$$

(2)

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + 2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 2y = 0 \qquad y(0) = 1,\ \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} = 0$$

8.　微分方程式のうち、独立な二変数以上の微分を含むものを偏微分方程式と呼ぶ。偏微分方程式について以下の問いに答えよ。

(1)　t と x の関数 $u(x,t)$ について、以下の偏微分方程式の一般解を求めよ (ただし $\kappa > 0$)。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

(2)　前問で、固定境界条件 $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ を与えた場合の特殊解を求めよ。

9.　上記の微分方程式は、ほぼすべて線形 (linear) 方程式であった。線形とは、f_1、f_2 が方程式の解であるとき、その線形和 $af_1 + bf_2$ も解であるような性質である (a, b は定数)。以下の方程式は線形か確認せよ。

(1)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 6\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

(2)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 6u\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

物理数学テストゼミ

基底と固有値問題

10.　行列 A とベクトル $\mathbf{x}$ について、$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ が成り立つとき、$\mathbf{x}$ を A の固有ベクトル、λ を固有値と呼ぶ。行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ について以下の問いに答えよ。

(1)　行列の固有値、及び対応する規格化された固有ベクトルを求めよ。ここで求められた固有ベクトルは互いに直交しているか確認せよ。

(2)　前問で求めた固有ベクトルをそれぞれ $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ とする。ベクトル $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ を、

$$\mathbf{a} = c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2$$

と展開することを考える。c_1, c_2 を求めよ。

(3)　得られた固有ベクトルを用いて行列 A を対角化せよ。その結果を用いて A^n を求めよ。

11.　ハミルトニアン $\mathcal{H}$ に対し、関数 ψ が $\mathcal{H}\psi = E\psi$ を満たすとき、ψ を波動関数、E をエネルギー固有値という。この波動関数とエネルギー固有値を求める問題も固有値問題と呼ぶ。固有値問題の例として、時間を含まない一次元シュレーディンガー (Schrödinger) 方程式、

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + V(x)\right)\psi = E\psi$$

を考えよう。$V(x)$ はポテンシャルを表す。m、$\hbar$、E はいずれも正の実数とする。

(1)　ポテンシャル $V(x) = 0$ の場合、$\psi(x)$ の一般解を求めよ。

(2)　一次元 $-L/2 < x < L/2$ の範囲で自由に運動する粒子が従う規格化された波動関数 ψ を求めよ。また、対応するエネルギー固有値も求めよ。

(3)　前問で求めた波動関数について、異なるエネルギー固有値に対応する波動関数が互いに直交することを示せ。

12.　前問のポテンシャルとして、$V(x) = m\omega^2x^2/2$ を考える。これは原点からの距離の二乗でエネルギーが高くなる、調和振動子を表している。この系について以下の問いに答えよ。

(1)　基底状態の波動関数を $\psi_0(x) = N_0 \exp\left(-a^2x^2/2\right)$ とおいて代入し、これが解であることと規格化条件から a、E、N_0 を求めよ。

(2)　この方程式の一般解は Hermite の多項式 $H_n(x)$ を用いて

$$\psi_n(x) = N_n H_n(ax) \exp\left(-a^2x^2/2\right)$$

と表すことができる。$H_n(ax)$ の満たすべき微分方程式を求めよ。(ヒント: $ax \to \xi$ と変数変換し、前問で求めた a を代入すると微分方程式が簡単な形になる)

(3)　Hermite の多項式は、具体的には $H_0 = 1$、$H_1 = 2x$、$H_2 = 4x^2 - 2$ である。$\psi_0(x)$ と $\psi_1(x)$、$\psi_2(x)$ がそれぞれ直交していることを確かめよ。

物理数学テストゼミ

フーリエ級数展開と超関数

13.　$(-\pi \leq x < \pi)$ で定義されている関数 $f(x)$ を、

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

の形に展開することをフーリエ級数展開という。以下の関数をフーリエ級数展開せよ。また、$x=0$ を代入して値が正しいか確認せよ。

(1)　$f(x) = |x|$

(2)　$f(x) = \begin{cases} -1 & -\pi \leq x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$

14.　$(-\pi \leq x < \pi)$ で定義されている関数 $f(x)$ を、

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n \exp{(inx)}$$

の形に展開することを複素フーリエ級数展開という (c_n は複素数)。これについて以下の問いに答えよ。

(1)　フーリエ級数展開と、複素フーリエ級数展開を比べ、c_n を a_n、b_n で表せ。

(2)　$f(x) = \mathrm{e}^x$ $(-\pi \leq x < \pi)$ を複素フーリエ級数展開し、この結果を用いて、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2}$ の値を求めよ。

15.　次の積分で定義される関数 $\delta(x)$ を、ディラック (Dirac) のデルタ関数という。

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\delta(x)f(x) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\mathrm{d}x\delta(x)f(x) = f(0)$$

ただし ε は任意の正数である。また、次のような関数 $\theta(x)$ を階段関数、もしくはヘビサイド (Heaviside) 関数という。

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ 1 & (x \geq 0) \end{cases}$$

これらの関数について、以下の問いに答えよ。ただし、デルタ関数、ヘビサイド関数と内積をとる関数 $f(x)$ は、$f(\infty) = f(-\infty) = 0$ であり、何回でも微分ができる性質を持つものとする。

(1)　次の等式を証明せよ。

$$\begin{aligned} x\delta(x) &= 0 \\ \delta(ax) &= \delta(x)/|a|,\ (a \neq 0) \end{aligned}$$

(2)　次の等式を証明せよ。

$$\frac{\mathrm{d}\theta(x)}{\mathrm{d}x} = \delta(x)$$

(3)　デルタ関数 $\delta(x)$ を、$(-\pi \leq x < \pi)$ の範囲で定義されていると考えて複素フーリエ級数展開せよ。

物理数学テストゼミ

フーリエ変換

16. 関数 $f(x)$ について、

$$\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x f(x) \mathrm{e}^{-ikx}$$

をフーリエ変換と呼び、$\hat{f}(k) = \mathcal{F}[f(x)]$ とあらわす。また、

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k \hat{f}(k) \mathrm{e}^{ikx}$$

を逆フーリエ変換 ($f(x) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}(k)]$) と呼ぶ。この時、以下を証明せよ。ただし、$f^{(n)}(\pm\infty) = 0$ とする。

(1) $\mathcal{F}\left[af(x) + bg(x)\right] = a\mathcal{F}[f(x)] + b\mathcal{F}[g(x)]$ (線形性)

(2) $\mathcal{F}\left[f^{(n)}(x)\right] = (ik)^n \hat{f}(k)$

(3) $\mathcal{F}[f(x+a)] = \mathrm{e}^{iak} \hat{f}(k)$

(4) $\mathcal{F}[x^n f(x)] = i^n \hat{f}^{(n)}(k)$

(5) $\mathcal{F}[f * g(x)] = \mathcal{F}[f(x)]\mathcal{F}[g(x)]$
ただし、$f * g(x)$ は

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) g(y) \mathrm{d}y$$

で定義される積分である (たたみ込み積分と呼ばれる)。

17. 次の関数のフーリエ変換を求めよ。ただし $a > 0$ とする。

(1)

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \le a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$$

(2)

$$f(x) = \mathrm{e}^{-a|x|}$$

18. 次の微分方程式を満たす解を $y(x)$、そのフーリエ変換を $\hat{y}(k)$ とする。方程式全体をフーリエ変換することで $\hat{y}(k)$ を求めよ。

(1)

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} - 2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \delta(x)$$

(2)

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} - y = \mathrm{e}^{-ax^2} \qquad (a > 0)$$

物理数学テストゼミ

複素積分とローラン展開

19.　複素関数 $f(z)$ が点 z_0 で微分可能であるとは、$\lim z \to z_0$ へどのように近づいても極限

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

が同じ値に定まることである (ただし $\Delta z = z - z_0$)。このとき、複素関数の微分について以下の問に答えよ。ただし、複素数 z を二つの実数を用いて $z = x + iy$ と、複素関数 $f(z)$ を、二つの実数関数を用いて $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ と表す。

(1)　$f(z)$ が微分可能であるとき、$u(x,y)$ と $v(x,y)$ が、以下の関係式

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

を満たすことを示せ。この関係式をコーシー・リーマン (Cauchy-Riemann) の関係式という。

(2)　複素関数 $f(z) = z^2$ はコーシー・リーマンの関係式が成り立つか確認せよ。

(3)　複素関数 $f(z) = z\bar{z}$ はコーシー・リーマンの関係式を満たすか確認せよ。ただし $\bar{z}$ は z の複素共役を表す。

20.　複素関数が $f(t) = u(t) + iv(t)$ とパラメータ t で表示されるとき、$f(t)$ の区間 $[a,b]$ での定積分を

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b u(t)\mathrm{d}t + i\int_a^b v(t)\mathrm{d}t$$

で定義する。このとき、以下の積分を求めよ。ただし、括弧内は積分区間である。

(1)　$f(z) = z^2$ (原点 0 から点 $1+i$ にいたる線分)

(2)　$f(z) = (z-a)^n$ $(n = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$ (点 a を中心とする半径 $r(>0)$ の円周上を反時計周りに一周)。

21.　関数 $f(z)$ が領域 D において微分可能であるとき、関数 $f(z)$ は D において正則であるという。点 a が $f(z)$ の孤立特異点であり、$f(z)$ が 領域 $D = \{z | r_1 < |z-a| < r_2\}$ において正則であるとき、$f(z)$ は点 a の周りで

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

と展開される。これを $f(x)$ の a におけるローラン (Laurent) 展開と呼ぶ。このとき、以下の問に答えよ。ヒント：収束半径 $(|z| < 1)$ に注意して以下の展開を利用せよ。

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - \cdots + (-1)^n z^n + \cdots$$

(1)　$f(z) = \dfrac{1}{z-1}$ を原点を中心とし、$|z| < 1$ 及び $1 < |z|$ のそれぞれの場合についてローラン展開せよ。

(2)　$f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)}$ を原点を中心とし、$|z| < 1$ 及び $1 < |z|$ のそれぞれの場合についてローラン展開せよ。

物理数学テストゼミ

留数定理とその応用

22.　関数 $f(z)$ は領域 D で正則であり、C は領域 D 内の単一閉曲線であるとする。このとき、C 内の点 a について、以下の公式が成り立つ (コーシーの積分公式)。

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z$$

これを用いて次の積分の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{\mathrm{e}^z}{z+1}\mathrm{d}z$　(原点を中心とし、半径 2 の円を正の向きに一周する積分路を表す。以下同様)

(2) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{z}{z^2+1}\mathrm{d}z$

23.　関数 $f(z)$ は領域 D で正則であり、C は領域 D 内の単一閉曲線であるとする。このとき、C 内の点 a について、以下の公式が成り立つ (これもコーシーの積分公式)。

$$f^n(a) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\mathrm{d}z$$

これを用いて次の積分の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{|z|=3} \frac{\mathrm{e}^{3z}}{(z-2)^2}\mathrm{d}z$

(2) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{1}{z^2(z-3)}\mathrm{d}z$

24.　関数 $f(z)$ が、$z=a$ を孤立特異点として持つとき、

$$\mathrm{Res}f(a) \equiv \frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\mathrm{d}z$$

を $f(z)$ の a における**留数 (residue)** と呼ぶ (ただし C は a の近傍を正の方向に一周する積分路とする)。以下の関数のすべての特異点における留数を求めよ。

(1) $\displaystyle\frac{\mathrm{e}^{iz}}{z^2+a^2}$　　$(a>0)$

(2) $\displaystyle\frac{1}{z^4+1}$

25.　次の実積分の値を、複素積分を利用して求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^4+1}\mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos kx}{x^2+1}\mathrm{d}x$　　$(k>0)$

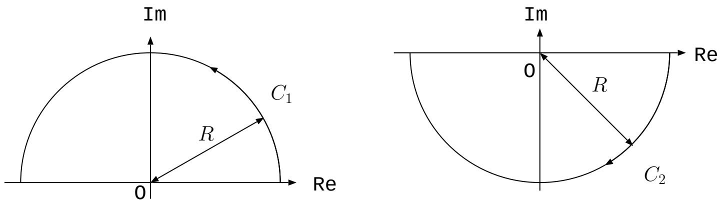
物理数学テストゼミ

フーリエ逆変換とジョルダンの補題

26. $\displaystyle\lim_{|z|\to\infty} f(z) = 0$ を満たす複素関数 $f(z)$ を考える。このとき、ある実数 $a > 0$ について、積分路を以下の図の C_1 のように取ると、

$$\lim_{R\to\infty}\int_C f(z)\mathrm{e}^{iaz} = 0$$

が成り立つ (ジョルダンの補題)。$a < 0$ のときは C_2 のように取れば、同様に成り立つ。このことに注意して、以下の問いに答えよ。



(1)　以下の関数 $f(x)$ をフーリエ変換せよ。ただし $a > 0$ とする。

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (-a < x < a) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

(2)　前問で求められたフーリエ変換 $\hat{f}(k)$ を逆フーリエ変換し、$f(x)$ に一致することを確かめよ。
ヒント：$x < -a$、$-a \leq x < a$、$a \leq x$ の場合にわけて積分路を考えよ。

27. 次の微分方程式の境界値問題を以下の手順で解け。

$$\frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2} - f(x) = \mathrm{e}^{-|x|} \qquad f(\pm\infty) = f'(\pm\infty) = 0$$

(1)　微分方程式全体をフーリエ変換せよ。

(2)　逆フーリエ変換により、解を求めよ。
ヒント：$x > 0$ と $x < 0$ に場合わけすること。

(3)　解を微分方程式に代入し、実際に解であることを確かめよ。

物理数学テストゼミ

ラプラス変換

28.　関数 $f(x)$ について、

$$\hat{f}(s) = \int_0^\infty \mathrm{d}x f(x) \mathrm{e}^{-sx}$$

をラプラス変換と呼び、$\hat{f}(s) = \mathcal{L}[f(x)]$ とあらわす。ただし、s はラプラス変換が存在するように値をとった複素数である。このとき、以下を証明せよ。

(1)　$\mathcal{L}\left[f^{(n)}(x)\right] = s^n \hat{f}(s) - \left\{s^{n-1} f(0) + s^{n-2} f'(0) + \cdots\right\}$

(2)　$\mathcal{L}\left[\mathrm{e}^{ax} f(x)\right] = \hat{f}(s-a)$

(3)　$\mathcal{L}[f * g(x)] = \mathcal{L}[f(x)]\mathcal{L}[g(x)]$
ただし、$f * g(x)$ は

$$f * g(x) = \int_0^x f(x-y) g(y) \mathrm{d}y$$

で定義される積分である (たたみ込み積分と呼ばれる)。

29.　次の関数 $f(x)$ のラプラス変換を求めよ。必要であればラプラス変換が存在するための s の条件も求めよ。

(1)　$f(x) = 1$

(2)　$f(x) = \delta(x)$

(3)　$f(x) = x$

(4)　$f(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}$　(α は複素定数)

30.　関数 $f(x)$ とそのラプラス変換 $\hat{f}(s)$ について、$s = a + bi$ とするとき

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \mathrm{d}s \hat{f}(s) \mathrm{e}^{sx}$$

を逆ラプラス変換と呼ぶ。以下の関数を逆ラプラス変換せよ。

(1)　$\hat{f}(s) = \dfrac{1}{s-\alpha}$　　α は複素定数

(2)　$\hat{f}(s) = \dfrac{s}{s^2 + c^2}$　　c は実定数

31.　以下の微分方程式の初期値問題をラプラス変換を用いて解け。

(1)　$\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} - 2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y = x$　　$(y(0) = y'(0) = 0)$

(2)　$\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + 2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y = 1$　　$(y(0) = y'(0) = 0)$